Fakultät für Informatik
Professur Theoretische Informatik
und Informationssicherheit
Prof. Dr. Hanno Lefmann

Sommersemester 2003

4. Juni 2003

Theoretische Informatik II

9. Übung

Aufgabe 1 Zu einer Klausel $C = z_1 \vee z_2 \vee z_3$ wird die folgende Menge von 10 Klauseln mit dem *privaten* Literal $z(C)$ konstruiert:

$$(z_1 \vee z_1), (z_2 \vee z_2), (z_3 \vee z_3), (z(C) \vee z(C)),$$
$$(\overline{z_1} \vee \overline{z_2}), (\overline{z_2} \vee \overline{z_3}), (\overline{z_3} \vee \overline{z_1}), (z_1 \vee \overline{z(C)}), (z_2 \vee \overline{z(C)}), (z_3 \vee \overline{z(C)}) .$$

(a) Zeigen Sie:

1. Ist für eine Belegung die Klausel C erfüllt, so gibt es eine Belegung von $z(C)$, so dass mindestens 7 der 10 Klauseln erfüllt sind.
2. Ist für eine Belegung die Klausel C jedoch nicht erfüllt, so sind für jede Belegung von $z(C)$ höchstens 6 der 10 Klauseln erfüllt.

(b) Das Problem Max2Sat ist wie folgt definiert:

Gegeben sind ein $l \in \mathbb{N}$ und eine Menge $C_1, \ldots, C_m$ von Klauseln, jede bestehend aus genau 2 Literalen.
Gefragt wird, ob mindestens l Klauseln gleichzeitig erfüllbar sind.

Zeigen Sie, dass das Problem Max2Sat $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie von 3-Sat unter Anwendung von (a).

Aufgabe 2 Sei k eine feste natürliche Zahl. Bei dem Problem Max$k$Cut sucht man zu gegebenen Graphen $G = (V, E)$ eine Zerlegung $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ der Knotenmenge V in k Mengen $V_1, \ldots, V_k$, so dass möglichst viele Kanten zwischen den Mengen verlaufen.

Geben Sie ein Polynomialzeitverfahren zur approximativen Lösung dieses Problems an, so dass der Wert der erhaltenen Lösung maximal um den Faktor $k/(k-1)$ vom optimalen Wert entfernt ist.

Begründen Sie ihre Vorgehensweise. Welche Laufzeit hat Ihr Verfahren?

Aufgabe 3 Wir betrachten das Problem DOMINATING SET:

Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$. Es ist gefragt, ob eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$ existiert, so dass zu jedem Knoten $v \in V \setminus V'$ mindestens ein Knoten $w \in V'$ existiert mit $\{v, w\} \in E$.

Beweisen Sie, dass das Problem DOMINATING SET $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis:

Reduzieren Sie von VERTEX COVER. Zu einer Eingabe $(G = (V, E), k)$ (o.E. ohne isolierte Knoten) für VERTEX COVER bilden Sie $(H = (W, F), l)$, wobei H ein Graph ist, der so gebildet wird, dass für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ ein (privater) neuer Knoten $z(e)$ sowie die Kanten $\{z(e), v\}$ und $\{z(e), w\}$ hinzugefügt werden. Die Zahl l wird geeignet gewählt.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass die Approximationsgüte des Problems VERTEX COVER höchstens 2 ist.

Hinweis:

Sie können annehmen, dass man in einem Graphen $G = (V, E)$ in Polynomialzeit ein maximales Matching (Menge von paarweise disjunkten Kanten $e \in E$) bestimmen kann.

(b) Sie kennen die Reduktion VERTEX COVER $\leq_p$ DOMINATING SET. Was folgt dann mit (a) für die Approximationsgüte des Problems DOMINATING SET? Begründen Sie ihre Antwort.