Literaturempfehlungen

[1] Bronstein, Semendjajew: *Teubner–Taschenbuch der Mathematik*, Hrsg.: E. Zeidler; B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1996

[2] Kahnt: *Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik*, Hrsg.: S. Gottwald, H. Kästner, H. Rudolph; 14. Aufl.; Meyers Lexikonverlag Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1995

Matrixnormen, Vektornormen und deren Verträglichkeit

Im $\mathbb{R}^n$ definiert man für $1 \leq p < \infty$ die Vektornormen

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad \text{wobei } x = (x_1, \ldots, x_n)^\top.$$

Für $p = \infty$ erhält man aus Grenzwertbetrachtungen

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Spezialfälle:

$p = 2$: **Euklidische Norm:** $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{x^\top x}$.

$p = 1$: **Summennorm:** $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

$p = \infty$: **Maximumnorm:** $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Im Fall $p = 2$ wird der Index oft weggelassen.
Für reelle Matrizen A definiert man allgemein

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Dabei ist sup (Supremum) eine ähnliche Funktion wie max. Sie liefert den maximalen Wert, den der nachfolgende Ausdruck annehmen kann (oder gegen den er konvergiert).
Wählt man im Bruch auf der rechten Seite nun eine konkrete Vektornorm, zum Beispiel eine der oben eingeführten p-Normen ($1 \leq p \leq \infty$), so indiziert man die Matrixnorm üblicherweise mit demselben Index:

$$\|A\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}. \tag{1}$$

Spezialfälle: Man kann zeigen, dass in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ durch $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$ gerade die **Spaltensummennorm** und die **Zeilensummennorm** beschrieben werden.

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(Spaltensummennorm).}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(Zeilensummennorm).}$$

Matrix- und Vektornorm heißen **verträglich**, wenn für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

gilt. Wählen wir die Matrixnorm passend zur Vektornorm (wie in (1) beschrieben), so ist diese Beziehung schon per Definition erfüllt; denn für beliebige Matrizen A und beliebige Vektoren x_0 gilt stets

$$\frac{\|Ax_0\|_p}{\|x_0\|_p} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \|A\|_p.$$

Multiplikaton mit $\|x_0\|_p$ liefert die Verträglichkeitsbedingung.
Die gesamte Theorie der Normen ist auch auf komplexe Zahlen erweiterbar.

Schöne Eigenschaften reeller, symmetrischer Matrizen

Es sei $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

(i) Alle **Eigenwerte** sind **reell**.

(ii) Die **Eigenvektoren** zu <u>verschiedenen</u> Eigenwerten sind **orthogonal**.

(iii) **Algebraische und geometrische Vielfachheiten** der Eigenwerte **stimmen überein**, das heißt, zu einem EW λ_j mit algebraischer Vielfachheit α_j gehören α_j linear unabhängige Eigenvektoren.

<u>*Beweis:*</u>

(i) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein EW von A und $x \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger EV. Dann gilt per Definition

$$Ax = \lambda x.$$

Wir setzen zur Abkürzung $y := Ax$ und multiplizieren obige Gleichung von links mit dem Vektor $x^\star = \overline{x^\top} = \overline{x}^\top$.

$$\Rightarrow\; x^\star y = x^\star \lambda x = \lambda x^\star x.$$

Da x EV ist, gilt $x \neq 0$, also $x^\star x = \|x\|^2 \neq 0$. Wir können also durch die Zahl $x^\star x$ teilen:

$$\lambda = \frac{x^\star y}{x^\star x}.$$

Nun ist der Nenner als Norm reell und positiv. Betrachten wir den Zähler

$$\begin{aligned}
x^\star y &= \overline{x}^\top y = \overline{x} \bullet y = \overline{x} \bullet Ax \\
&= \overline{x} \bullet \overline{A}^\top x && (A \text{ reell, symmetrisch}) \\
&= \overline{x}^\top \overline{A}^\top x = (\overline{Ax})^\top x = \overline{y}^\top x \\
&= \overline{y} \bullet x = x \bullet \overline{y} = x^\top \overline{y} && (\text{Skalarprodukt kommutativ}) \\
&= \overline{\overline{x}^\top y} = \overline{x^\star y},
\end{aligned}$$

so sehen wir, dass auch dieser reell sein muss. Folglich ist auch λ reell.

Da das System

$$(A - \lambda I)x = 0$$

reell ist, folgt außerdem, dass die Eigenvektoren ebenfalls reell gewählt werden können.

(ii) Seien $\lambda_i \neq \lambda_j$ zwei verschiedene EW von A mit zugehörigen EV x^i, x^j. Wir wissen:

$$\begin{aligned}
{x^j}^\top \cdot \mid \qquad x^i &= \lambda_i x^i \\
{x^j}^\top A x^i &= {x^j}^\top \lambda_i x^i = \lambda_i {x^j}^\top x^i
\end{aligned} \tag{2}$$

und analog mit vertauschten Indizes

$$\begin{aligned}
{x^i}^\top \cdot \mid \qquad x^j &= \lambda_j x^j \\
{x^i}^\top A x^j &= {x^i}^\top \lambda_j x^j = \lambda_j {x^i}^\top x^j.
\end{aligned} \tag{3}$$

Subtraktion der Gleichungen (2) und (3) liefert

$${x^j}^\top A x^i - {x^i}^\top A x^j = \lambda_i {x^j}^\top x^i - \lambda_j {x^i}^\top x^j.$$

Da $A = A^\top$ eine symmetrische Matrix ist, ergibt sich für die linke Seite wegen

$${x^j}^\top A x^i = x^j \bullet (Ax^i) = (Ax^i) \bullet x^j = (Ax^i)^\top x^j = {x^i}^\top A^\top x^j = {x^i}^\top A x^j,$$

dass diese null wird. Wir haben also

$$0 = \lambda_i {x^j}^\top x^i - \lambda_j {x^i}^\top x^j = (\lambda_i - \lambda_j)\big(x^i \bullet x^j\big)$$

Wegen $\lambda_i \neq \lambda_j$ folgt, dass das Skalarprodukt $x^i \bullet x^j$ null werden muss, was schließlich die Orthogonalität von x^i und x^j liefert: $x^i \perp x^j$.