
Übungen Grundkurs Mathematik für Informatiker 2. Semester

7. Übung: Charakteristisches Polynom, Eigenwerte und -vektoren

1. Berechnen Sie die charakteristischen Polynome, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & \frac{17}{2} \\ \frac{17}{2} & 8 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen und vergleichen Sie!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -3 & \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A .

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$A^2 = A \cdot A$, A^{-1} und die Eigenwerte von α , αA , $A + \alpha I$, $A + A^3$, und $P(A)$.
($\alpha \in \mathbb{R}$, $P(x)$ sei ein gegebenes Polynom).

5. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der linearen Abbildung des \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 :

$$f((x, y, z)^T) = (y + z, x + z, x + y)^T.$$