Fakultät für Mathematik
Prof. A. Meyer

28. Juni 2002

Übungen Grundkurs Mathematik für Informatiker 2. Semester

12. Übung: Folgen, Reihen, Grenzwerte von Funktionen

1. Weisen Sie die Konvergenz mittels Definition nach!

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n^3}, \quad c_n = \frac{1}{2^n}, \quad d_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}.$$

2. Beweisen Sie:

   2.1. Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

   2.2. $a_n \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \longrightarrow 0.$

3. Zeigen Sie $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ mit $a > 0$, $\qquad \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1.$

4. Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\frac{\pi}{2}, \quad c_n = \frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1},$$

$$d_n = \frac{\sqrt{n}-6n}{3n+2}, \quad e_n = 1 + (-1)^n, \quad f_n = \frac{n+1}{2n^3+3}, \quad g_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}.$$

$$h_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad k_n = \frac{1+2+\cdots+n}{9n^4+1}.$$

5. Sind die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

   konvergent? Beweisen Sie Ihre Vermutung!
   Der Grenzwert der Partialsummenfolge ist gegebenenfalls anzugeben!

6. Untersuchen Sie die Funktionen

$$y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}, \qquad y = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}, \qquad y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$$

   auf Unstetigkeitsstellen. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

7. Bestimmen Sie die (gegebenenfalls linksseitigen und rechtsseitigen) Grenzwerte der folgenden Funktionen für die angegebenen Stellen sowie für $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

$$y = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}, \quad x = -2, \quad x = 3; \qquad y = \frac{1}{\ln|x|}, \quad x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

   Skizzieren Sie mit diesen Angaben die Graphen der Funktionen!