

Übungen Grundkurs Mathematik für Informatiker 2. Semester

**13./14. Übung: Stetigkeit, Differenzierbarkeit von Funktionen,
Kurvendiskussionen**

1. Ist die folgende Funktion stetig an der Stelle $x = 1$ für $a = 3$ und $a = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ a & \text{für } x = 1 \\ 3x^2 & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$$

2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit!

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2.$$

3. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig aber nicht differenzierbar?

$$y = f_1(x) = |x^2 - 4| + 4, \quad y = f_2(x) = 2|x - 1| - |x - 2|.$$

4. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieintervalle, relative Extrema, Intervalle mit konkavem bzw. konvexem Verhalten, das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs!
Skizzieren Sie mit diesen Angaben diese Funktionen!

$$y = f_1(x) = x^2 e^{1-x}, \quad y = f_2(x) = x \ln^2 x,$$

$$y = f_3(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad y = f_4(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1},$$

$$y = f_5(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}, \quad y = f_6(x) = 2x^6 - x^4,$$

$$y = f_7(x) = x + \sin x, \quad y = f_8(x) = \sin 3x - 3 \sin x.$$

5. Bestimmen Sie nach der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \sin x - \cos^2 x}{2x - \sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$