Fakultät für Mathematik
Prof. A. Meyer

19. April 2002

Übungen Grundkurs Mathematik für Informatiker 2. Semester

3. Übung: Lineare Operatoren

1. Sei $E_1 = \Pi_n$ (Raum der Polynome max. n-ten Grades).
   Sind durch folgende Vorschriften lineare Operatoren definiert, die E_1 in einen linearen Raum E_2 abbilden? Wie sieht E_2 aus?

   $\mathcal{A}(x(t)) = t \cdot x(t)$ $\qquad$ $\mathcal{A}(x(t)) = x(t^2)$
   $\mathcal{A}(x(t)) = x(t) + x'(t)$ $\qquad$ $\mathcal{A}(x(t)) = (x(t))^2$
   $\mathcal{A}(x(t)) = \int\limits_0^t x(s)ds$ $\qquad$ $\mathcal{A}(x(t)) = x(t) + 1$
   $\mathcal{A}(x(t)) = y(t) \cdot x(t)$ $\qquad$ $y(t)$ feste Funktion

2. $E_1 = \mathbb{R}^3,\ E_2 = \mathbb{R}^2$
   $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in E_1 \longrightarrow y = (y_1, y_2)^T \in E_2$ mit $\mathcal{A} : y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2 + x_3$.
   Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ in

   2.1. den Basen: $E_1 : (1, 0, 0)^T,\ (0, 1, 0)^T,\ (0, 0, 1)^T$ und $E_2 : (1, 0)^T,\ (0, 1)^T$,

   2.2. den Basen: $E_1 : (1, 0, 0)^T,\ (0, 1, -1)^T,\ (0, 1, 1)^T$ und $E_2 : (1, 0)^T,\ (0, 1)^T$,

3. In $E_1 = \Pi_3$ ist durch $X = \{1, t, t^2, t^3\}$ eine Basis definiert.
   Definieren Sie sich eine einfache Basis in E_2 und berechnen Sie die Matrixrepräsentation von $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 1.
   Berechnen Sie das Bild von $x(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

   3.1. durch direkte Berechnung von $\mathcal{A}(x(t))$.

   3.2. mit Hilfe der Zerlegungskoeffizienten von x und der Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$.

4. Im Raum Π_n mit der Basis $\{1, t, \frac{t^2}{2} \ldots, \frac{t^n}{n}\}$ sei folgender Operator definiert:
   $\mathcal{A}(x(t)) = x'(t)$.
   Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$, wenn im Bildraum die Basis $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ gegeben ist. Ist der Operator umkehrbar?

5. Die Anwendung eines linearen Operators $\mathcal{A}$ auf Basiselemente des $\mathbb{R}^4$ ergibt:
   $\mathcal{A}(e_1) = (1, 1, -1, 1),\ \mathcal{A}(e_2) = (1, 0, 0, 0)$,
   $\mathcal{A}(e_3) = (0, 1, 0, 0),\ \mathcal{A}(e_4) = (0, 0, -1, 1)$.
   Gesucht ist die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ in der Standardbasis.