Fakultät für Mathematik
Prof. A. Meyer
20. November 2001

Übungen Grundkurs Mathematik für Informatiker 1. Semester

7. Übung: Abbildungen, Funktionen

1. Geben Sie Funktionen $f : M \to N$ an und untersuchen Sie diese auf die Eigenschaften *injektiv, surjektiv, bijektiv*!

   1.1. $M = \{a, b\}, N = \{1, 2\}$; $\quad M = \{a\}, N = \{1, 2, 3\}$

   1.2. $M = \{a, b\}, N = \{1\}$; $\quad M = \{a, b, c, d\}, N = \{1, 2, 3\}$

2. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ *injektiv, surjektiv, bijektiv* sind.
   a) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = e^x$
   b) $A = \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},\ B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$
   c) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sin x$
   d) $A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\},\ B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \tan x$
   e) $A = B = \mathbb{N}$, $\quad f(n) = n^2$
   f) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$, $\quad f(n) = \frac{1}{n}$
   g) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = |2x - 4|$

   Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen $A',\ B'$ von $A,\ B$ an, so daß $f : A' \to B'$ bijektiv wird.
   Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$.

3. Seien $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ zwei Funktionen und $h = g \circ f$ ihre Komposition.
   Zeigen Sie: Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv.

4. Leiten Sie mittels Division $P_n(x) : (x - x_0)$ den Algorithmus für das HORNER-Schema her zur Berechnung von $P_{n-1}(x)$, $P(x_0)$ und $P'(x_0)$.

5. Zu den angegebenen Polynomen ist $P(2)$ und $P'(2)$ unter Verwendung des HORNER-Schemas zu bestimmen.
   $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1, \qquad P(x) = x^4 - 5x^3 - 3x + 21.$

6. Bestimmen Sie unter Verwendung des HORNER-Schemas die ganzzahligen Nullstellen der folgenden Polynome!

   6.1. $P(x) = x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 11x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x,$

   6.2. $P(x) = x^7 + x^6 - 23x^5 - 32x^4 + 103x^3 + 256x^2 + 144x.$

   Geben Sie Produktdarstellungen unter Verwendung von Linearfaktoren für die Polynome an.
   Lösen Sie die verbleibenden Polynomgleichungen grafisch!